

UMA ABORDAGEM INOVADORA DO ELEMENTO HETEROSIS DE FLEXÃO DE PLACA DE REISSNER-MINDLIN

H. Lima Soriano, Professor Titular Visitante da Universidade do Estado do Rio de Janeiro e da Universidade Federal do Rio de Janeiro

A. Figueira Pinto, Professor da UNIVER-CIDADE e da UNIG - Universidade Iguazu

S. de Souza Lima, Professor Adjunto da Universidade Federal do Rio de Janeiro

RESUMO

Desenvolve-se no presente trabalho o elemento biquadrático heterosis de flexão de placa com as hipóteses de Reissner-Mindlin, utilizando funções de interpolação hierárquicas nas definições do campo de deslocamentos e paramétrica de geometria. O uso dessas funções simplifica o desenvolvimento deste elemento frente ao procedimento usual com funções de interpolação convencionais. Como no tratamento do sistema global de equações, estas últimas funções têm vantagens em relação às primeiras, apresenta-se um algoritmo muito para transformá-lo em não hierárquico. Finalmente, são apresentadas aplicações numéricas que comprovam a exatidão do desenvolvimento apresentado e realçam o bom comportamento numérico do elemento heterosis.

1 - INTRODUÇÃO

Em 1978 Hughes e Cohen propuseram o elemento biquadrático heterosis de flexão de placa com as hipóteses de Reissner-Mindlin, elemento este de formulação convencional a partir de campo de deslocamentos, que teve muito sucesso por não apresentar modo espúrio de energia nula e nem travamento de esforço cortante. A partir do trabalho de Bathe e Dvorkin (1985), os pesquisadores passaram a dar preferência a elementos com campo assumido de deformações covariantes de esforço cortante, devido à robustez de alguns destes elementos. Contudo, estes elementos têm fundamentação teórica mais elaborada do que os de formulação convencional de campo assumido de deslocamentos, justificando uma nova análise do elemento biquadrático heterosis.

O elemento heterosis utiliza funções de interpolação serendipity para os deslocamento transversal e, funções Lagrange para as rotações. Hughes (1987) desenvolveu esse elemento com funções de interpolação convencionais, degenerando o elemento biquadrático Lagrange através da introdução de restrições ao deslocamento transversal do nó central definidas pela interpolação biquadrática serendipity.

Neste trabalho, o heterosis é desenvolvido com funções de interpolação hierárquicas, que permitem utilizar nas interpolações das rotações as mesmas funções da interpolação do deslocamento transversal adicionadas de uma função bolha. Estas funções facilitam o desenvolvimento do elemento, mas conduzem a um sistema de equações de equilíbrio com particularidades desfavoráveis, em relação ao correspondente sistema obtido com funções de interpolação convencionais, para a consideração, nos pontos médios dos lados do elemento, de apoios elásticos, de apoios rígidos pela técnica do número grande e de prescrição de relações entre deslocamentos nodais. Para evitar tais particularidades, um algoritmo simples que transforma o referido sistema derivado de funções hierárquicas no sistema oriundo de funções convencionais é apresentado neste trabalho. Além disso, apresentam-se aplicações numéricas que comprovam a exatidão do desenvolvimento apresentado e o comparam o comportamento do heterosis frente a outros elementos. Dado à simplicidade de seu desenvolvimento e ao seu bom comportamento numérico do heterosis, justifica-se a sua utilização em cursos introdutórios do método de elementos finitos e em aplicações correntes de engenharia.

2 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO HETEROSIS

Para o elemento da figura 1, com as convenções representadas na figura 2, escrevem-se as soluções aproximadas

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 \mathbf{N}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_i^h \\ \theta_{x_i}^h \\ \theta_{y_i}^h \end{Bmatrix} \quad (1)$$

onde $(\mathbf{w}_i^h, \theta_{x_i}^h, \theta_{y_i}^h)$ são os deslocamentos hierárquicos do ponto nodal de ordem i , $\mathbf{w}_9 = \mathbf{0}$ e \mathbf{N}_i são as funções de interpolação hierárquicas

$$\mathbf{N}_1 = (1 + \xi)(1 + \eta)/4 \quad , \quad \mathbf{N}_2 = (1 - \xi)(1 + \eta)/4 \quad (2a,b)$$

$$\mathbf{N}_3 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4 \quad , \quad \mathbf{N}_4 = (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \quad (2c,d)$$

$$\mathbf{N}_5 = (1 - \xi^2)(1 + \eta)/2 \quad , \quad \mathbf{N}_6 = (1 - \xi)(1 - \eta^2)/2 \quad (2e,f)$$

$$\mathbf{N}_7 = (1 - \xi^2)(1 - \eta)/2 \quad , \quad \mathbf{N}_8 = (1 + \xi)(1 - \eta^2)/2 \quad (2g,h)$$

$$\mathbf{N}_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (2i)$$

Essas funções são mais simples do que as correspondentes funções de interpolação convencionais. A interpolação com \mathbf{N}_1 a \mathbf{N}_8 é biquadrática serendipity e a interpolação com \mathbf{N}_1 a \mathbf{N}_9 é biquadrática Lagrange.

Figura 1 - Elemento quadrático em coordenadas adimensionais

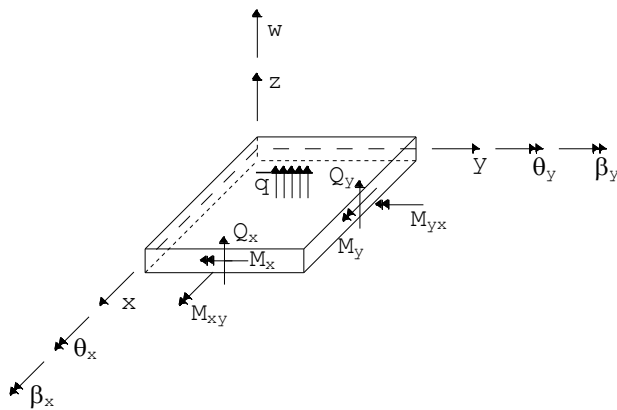


Figura 2 - Convenções de sinais de placa

Particularizando a interpolação de w expressa pela equação (1) para o lado $\eta = 1$ do elemento, escreve-se

$$w = \frac{1 + \xi}{2} w_1^h + \frac{1 - \xi}{2} w_2^h + (1 - \xi^2) w_5^h \quad (3)$$

evidenciando que o deslocamento hierárquico w_5^h é a diferença, no ponto $(\xi = 0, \eta = 1)$, entre as interpolações quadrática e linear. Essa conclusão se estende a todos os graus de liberdade de ponto nodal de lado do elemento. Como as funções quadráticas \mathbf{N}_5 a \mathbf{N}_8 se anulam nos vértices do elemento, os deslocamentos hierárquicos dos nós 1 a 4 são os próprios deslocamentos físicos convencionais. Logo, pode-se utilizar as funções hierárquicas biquadráticas serendipity para definir a geometria do elemento por interpolação das coordenadas nodais, escrevendo-se a matriz Jacobiana sob a forma

$$[\mathbf{J}] = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i,\xi} \mathbf{x}_i^h & \mathbf{N}_{i,\xi} \mathbf{y}_i^h \\ \mathbf{N}_{i,\eta} \mathbf{x}_i^h & \mathbf{N}_{i,\eta} \mathbf{y}_i^h \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde a vírgula depois do índice indica derivação, $(\mathbf{x}_i^h, \mathbf{y}_i^h)$, com i de 1 até 4 são as coordenadas dos nós de vértice e , com i de 5 a 8, são as “coordenadas hierárquicas nodais” definidas por

$$\mathbf{x}_i^h = \mathbf{x}_i - \frac{\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_k}{2} \quad , \quad \mathbf{y}_i^h = \mathbf{y}_i - \frac{\mathbf{y}_j + \mathbf{y}_k}{2} \quad (5a,b)$$

)
onde j e k se referem ao vértices do lado referente ao ponto nodal i de lado do elemento.

As deformações generalizadas do modelo de placa de Reissner-Mindlin se escrevem a partir do campo de deslocamentos definido pela equação (1) sob a forma

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} -\theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{x,x} - \theta_{y,y} \\ \mathbf{w}_{,x} + \theta_y \\ \mathbf{w}_{,y} - \theta_x \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mathbf{N}_{i,x} \\ 0 & \mathbf{N}_{i,y} & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{i,x} & -\mathbf{N}_{i,y} \\ \mathbf{N}_{i,x} & 0 & \mathbf{N}_i \\ \mathbf{N}_{i,y} & -\mathbf{N}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_i^h \\ \theta_{x_i}^h \\ \theta_{y_i}^h \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{N}_{9,x} \\ \mathbf{N}_{9,y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{9,x} & -\mathbf{N}_{9,y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_9 \\ -\mathbf{N}_9 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x9}^h \\ \theta_{y9}^h \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \sim \mathbf{F}_i \\ \mathbf{B} \\ \sim \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_i^h \\ \theta_{x_i}^h \\ \theta_{y_i}^h \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \sim \mathbf{F}_9 \\ \mathbf{B} \\ \sim \mathbf{C}_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x9}^h \\ \theta_{y9}^h \end{Bmatrix} \quad (5)$$

onde os índices F e C se referem, respectivamente, às parcelas de deformação de flexão e de esforço cortante.

Logo, a submatriz de rigidez hierárquica de acoplamento dos nós i e j do elemento, com definição paramétrica de geometria, se escreve sob a forma

$$[\mathbf{S}_{ij}^h] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left([\mathbf{B}_{Fi}]^T [\mathbf{E}'] [\mathbf{B}_{Fj}] + \mathbf{GKt} [\mathbf{B}_{Ci}]^T [\mathbf{I}] [\mathbf{B}_{Cj}] \right) \mathbf{J} d\xi d\eta = [\mathbf{S}_{Fij}^h] + [\mathbf{S}_{Cij}^h] \quad (6)$$

onde $[\mathbf{I}]$ é matriz identidade, $[\mathbf{J}]$ é o determinante da matriz Jacobiana, K é o fator de cisalhamento (usualmente igual a 5/6), G é o módulo de elasticidade transversal, t é a espessura e

$$[\mathbf{E}'] = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_{33} \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde E e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson. Substituindo as submatrizes $[\mathbf{B}]$ da equação (5) e a equação (7) na equação (6), obtém-se as submatrizes de rigidez relativas a flexão e a esforço cortante, respectivamente,

$$[\mathbf{S}_{F_{ij}}^h] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_{22} \mathbf{N}_{i,y} + \mathbf{N}_{j,y} + \mathbf{e}_{33} \mathbf{N}_{i,x} \mathbf{N}_{j,x} & -\mathbf{e}_{12} \mathbf{N}_{i,y} \mathbf{N}_{j,x} - \mathbf{e}_{33} \mathbf{N}_{i,x} \mathbf{N}_{j,y} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{e}_{12} \mathbf{N}_{i,x} \mathbf{N}_{j,y} - \mathbf{e}_{33} \mathbf{N}_{i,y} \mathbf{N}_{j,x} & \mathbf{e}_{11} \mathbf{N}_{i,x} \mathbf{N}_{j,x} + \mathbf{e}_{33} \mathbf{N}_{i,y} \mathbf{N}_{j,y} \end{bmatrix} \Big|_{\sim} \mathbf{J} \Big|_{\sim} d\xi d\eta \quad (8.a)$$

$$[\mathbf{S}_{C_{ij}}^h] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{GKt} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i,x} \mathbf{N}_{j,x} + \mathbf{N}_{i,y} \mathbf{N}_{j,y} & -\mathbf{N}_j \mathbf{N}_{i,y} & \mathbf{N}_j \mathbf{N}_{i,x} \\ -\mathbf{N}_i \mathbf{N}_{j,y} & \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_i \mathbf{N}_{j,x} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j \end{bmatrix} \Big|_{\sim} \mathbf{J} \Big|_{\sim} d\xi d\eta \quad (8.b)$$

A matriz de rigidez do elemento é obtida fazendo i e j variar de 1 até 9 nessas duas últimas equações, desconsiderando-se as linhas e colunas das submatrizes associadas a w_9 que não ocorre no heterosis. A integração numérica de Gauss-Legendre da parcela de rigidez de flexão é completa com 3 x 3 pontos e, da parcela de rigidez de esforço cortante é reduzida com 2 x 2 pontos. Esta integração reduzida seletiva não introduz modos espúrios de energia nula e, como mostrado numericamente no item 4, conduz a elemento sem travamento de esforço cortante.

O vetor de forças nodais hierárquicas equivalentes à carga transversal \bar{q} por unidade de área, relativo ao i -ésimo nó, se escreve

$$\left\{ \mathbf{f}_i^h \right\}_{\mathbf{q}} = - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i & & \\ & \mathbf{N}_i & \\ & & \mathbf{N}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \Big|_{\sim} \mathbf{J} \Big|_{\sim} d\xi d\eta = - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \bar{q} \Big|_{\sim} \mathbf{J} \Big|_{\sim} d\xi d\eta \quad (9)$$

com i variando de 1 até 8.

O vetor de forças nodais hierárquicas equivalentes à lei linear de temperatura de $-T$ na face $z = -t/2$ a $+T$ na face $z = +t/2$, relativo ao i -ésimo nó, se escreve

$$\left\{ \mathbf{f}_i^h \right\}_{\mathbf{T}} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}_{Fi}]^T \frac{E t^2 \alpha \mathbf{T}}{6(1-\nu)} \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \Big|_{\sim} \mathbf{J} \Big|_{\sim} d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{E t^2 \alpha \mathbf{T}}{6(1-\nu)} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{i,y} \\ -\mathbf{N}_{i,x} \end{Bmatrix} \Big|_{\sim} \mathbf{J} \Big|_{\sim} d\xi d\eta \quad (10)$$

com i variando de 1 até 9, mas desconsiderando o primeiro termo para $i=9$.

Após o cálculo dos deslocamentos nodais, tem-se as resultantes de tensões

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{GKtI}} \end{bmatrix} \{\varepsilon\} + \{\sigma\}_T = \sum_{i=1}^9 \begin{Bmatrix} e_{12}N_{i,y}\theta_{xi} - e_{11}N_{i,x}\theta_{yi} \\ e_{22}N_{i,y}\theta_{xi} - e_{12}N_{i,x}\theta_{yi} \\ e_{33}N_{i,x}\theta_{xi} - e_{33}N_{i,y}\theta_{yi} \\ \mathbf{GKt}(N_{i,x}w_i + N_i\theta_{yi}) \\ \mathbf{GKt}(N_{i,y}w_i - N_i\theta_{xi}) \end{Bmatrix} + \frac{Et^2\alpha T}{6(1-\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

onde considera-se $w_9 = 0$.

3 - TRANSFORMAÇÃO AO ELEMENTO HETEROSIS CONVENCIONAL

Como evidenciado no item anterior, as funções de interpolação hierárquicas facilitam o desenvolvimento do presente elemento por não se ter necessidade de utilizar para as rotações funções distintas das funções adotadas para o deslocamento transversal e por serem mais simples do que as correspondentes funções convencionais. Contudo, pelo fato dos deslocamentos hierárquicos dos pontos de lado do elemento serem as diferenças entre as interpolações quadrática e linear no correspondente ponto, apresentam dificuldades para mesclar elementos hierárquicos e convencionais (como no caso de uma placa nervurada em que as nervuras são idealizadas como elementos de grelha), para o cálculo de reação de apoio pela técnica do número grande (quando esta reação é o esforço no elemento de grande rigidez que faz a função do apoio), para a introdução de apoios elásticos discretos e para considerar a prescrição de relações entre deslocamentos nodais (como no caso de nó *master* versus nó *slave*). Assim, é vantajoso determinar o sistema global de equações relativo aos deslocamentos nodais convencionais.

Designando os deslocamentos hierárquicos e os convencionais de ponto de lado do elemento, respectivamente, por \mathbf{u}_i^h e \mathbf{u}_i , cujos correspondentes deslocamentos dos vértices do mesmo lado são designados por \mathbf{u}_j e \mathbf{u}_k escreve-se

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_k}{2} + \mathbf{u}_i^h \quad (12)$$

Logo, tem-se a transformação de deslocamentos

Neste algoritmo, s_{ij} e f_j são coeficientes da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais hierárquicas que se transformam nos correspondentes coeficientes convencionais

4 - APLICAÇÕES NUMÉRICAS

O desenvolvimento apresentado não altera obviamente o comportamento numérico já conhecido do heterosis, apenas facilita a obtenção do seu sistema de equações de equilíbrio. Assim, o objetivo do presente item é comprovar a exatidão deste desenvolvimento e realçar o bom comportamento do elemento.

Para verificação de travamento de esforço cortante, a figura 3 apresenta gráficos do deslocamento transversal normaliza do centro de placa quadrada engastada de vão L e espessura t , sob carregamento concentrado em seu centro, versus L/t . Aproveitando condição de dupla simetria, discretizou-se apenas um quadrante utilizando 10×10 elementos em condição forte de contorno. Nessa figura, **sol. exata** é a solução da teoria clássica, **bilinear** se refere ao elemento bilinear convencional de campo de deslocamentos mas com integração reduzida seletiva e **biquadrático** se refere ao elemento serendipity convencional com integração completa. Observa-se que, com o elemento biquadrático serendipity, os resultados divergem do correto na proximidade de $\log(L/t)=3$, quando a relação entre lado do elemento e sua espessura é igual a 10^2 , evidenciando travamento. A ligeira perturbação de resultados do bilinear a partir de $\log(L/t)=6$ ocorre em elementos extremamente finos sem aplicação em engenharia. O heterosis não apresentou travamento. Pode-se verificar que este elemento em forma moderadamente distorcida continua com bom comportamento quanto a travamento.

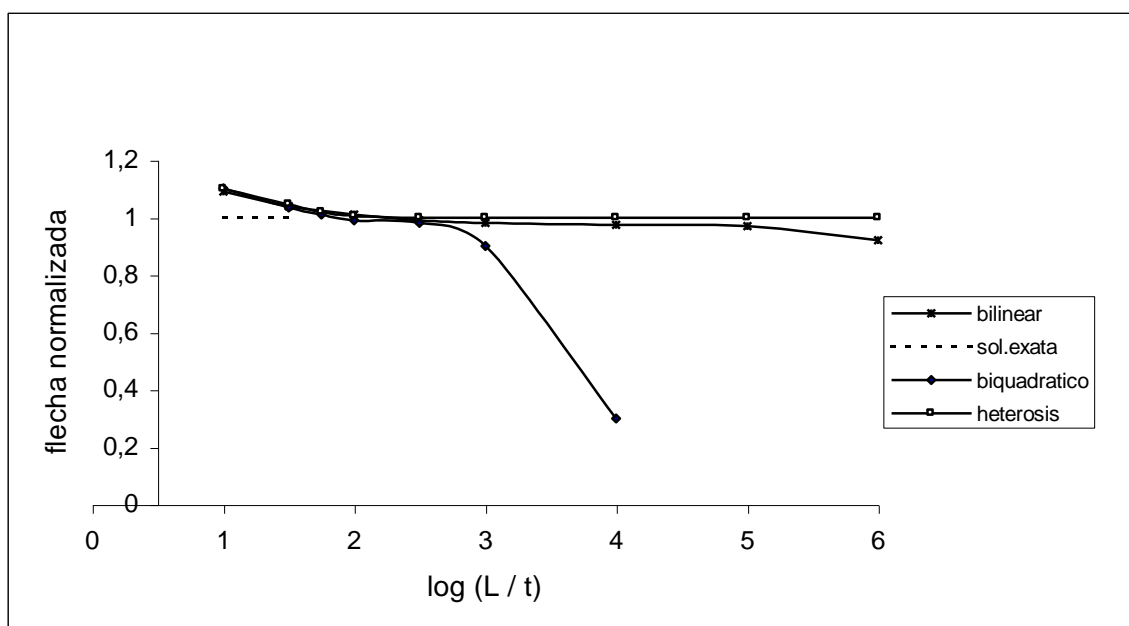


Figura 3 – Deslocamento transversal normalizado do central de placa engastada

O elemento bilinear com integração reduzida seletiva desenvolvido por Hughes e co-autores (1977) e o elemento bilinear de campo assumido de deformações covariantes de esforço cortante desenvolvido por Bathe e Dvorkin em 1985, em análise de um único elemento engastado em um de seus lados e carregado no lado oposto como uma viga em balanço de pequena altura com carga concentrada em sua extremidade livre, fornecem resultados exatos de momento fletor e de esforço cortante no centróide do elemento (posição de um ponto de integração de Gauss-Legendre e ponto ótimo de cálculo de tensões). Em análise da mesma viga em balanço, mas sob carregamento uniformemente distribuído, com um único elemento heterosis obtém-se resultados exatos de momento fletor e de esforços cortantes nos pontos de integração de Gauss-Legendre 2×2 (pontos ótimos de cálculo de tensão), enquanto os referidos elementos bilineares fornecem resultados de momento com 100 por cento de erro no centróide e apenas resultado exato de esforço cortante. Ressalta-se que valores de tensão no centróide de elementos bilineares não permitem extrapolação de resultados, enquanto que isto é possível com os pontos ótimos de tensão do elemento heterosis. Assim, é inquestionável o melhor comportamento a flexão do elemento biquadrático frente aos bilineares.

Para verificar o comportamento de torção de um único elemento, considera-se o teste de torção proposto por Robinson e Haggemacher (1978), em cujos gráficos de deslocamento da extremidade livre versus comprimento do elemento, foram introduzidos os resultados obtidos com o heterosis, como mostram as figuras 4 e 5. Nestes gráficos, LORA é o elemento desenvolvido por Robinson e Haggemacher, QUAD4 é o elemento de R. H. MacNeal (“A simple quadrilateral shell element”, MacNeal-Schwendler Report Number 52 - 1976), STRAP5 é o elemento de R. E. Hubka (“Buckling analysis of stiffened curved and flat rectangular plates”, Lockheed-California Company Report Number LR 25381, 1972), QDPLT é o elemento de R. H. MacNeal (“NASTRAN theoretical manual, 1969), e Pian é o elemento de T. H. H. Pian (“Element stiffness matrices for boundary compatibility and for prescribed boundary stresses”, Wright-Patterson, AFFDL-TR-66-80, 1965). Os referidos gráficos evidenciam que o comportamento de torção do heterosis é superior aos dos demais elementos.

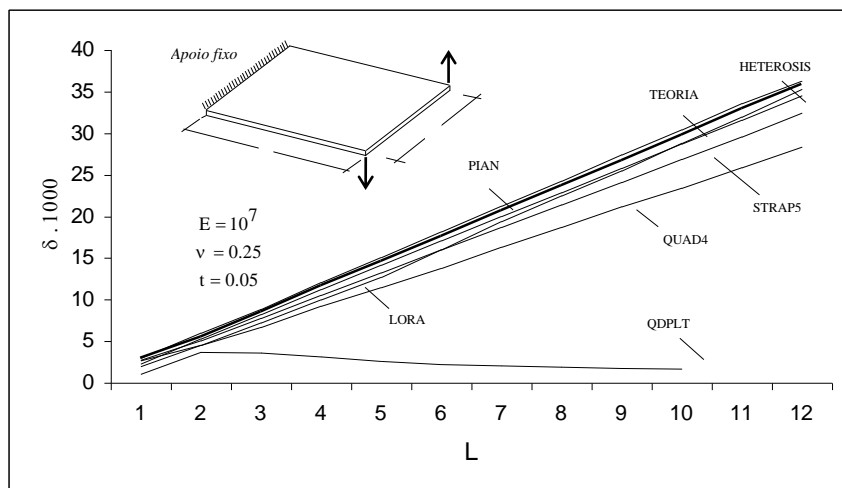


Figura 4 – Deslocamentos em teste de torção com forças concentradas

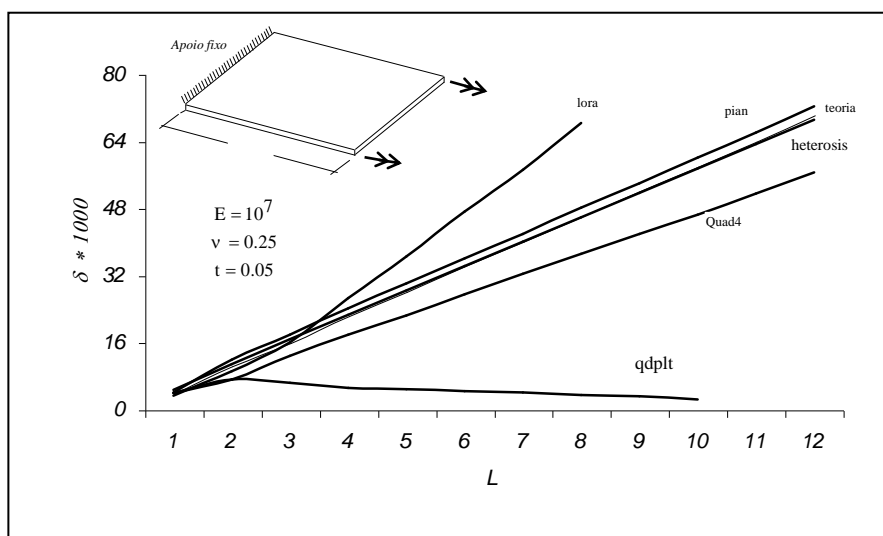


Figura 5 – Deslocamentos em teste de torção com momentos concentrados

Para comparar acurácia com formas distorcidas de elementos, foi analisada uma placa circular de aço engasta (em condição forte) com carga concentrada no ponto central e com carga uniformemente distribuída, com as discretizações de um quadrante representadas na figura 6, utilizando o elemento heterosis, o elemento de Bathe e Dvorkin com a denominação QUAD4 e o elemento bilinear com integração reduzida com a denominação QUAD4R. A

tabela 1 apresenta resultados destes elementos em termos de flechas normalizadas no centro da placa. Observa-se que os melhores resultados foram fornecidos pelo heterosis.

(entra a figura 10.12 do livro sem a parte de 8x8 elementos)

Figura 6 – Malhas de um quadrante de placa circular

Tabela 1 – Flechas normalizadas de placa circular com as malhas da figura 6

ELEMENTO	MALHA	CARGA	
		CONCENTRADA	DISTRIBUÍDA
QUAD 4	2x2	0.7895	0.9283
	4x4	0.9520	0.9935
QUAD4R	2x2	0.9232	0.8601
	4x4	0.9631	0.9557
HETE ROSIS	2x2	0.9504	1.0005
	4x4	0.9775	1.0022

A placa rômica representada na figura 6 é considerado um problema de difícil resolução pelo método dos elementos finitos porque os momentos M_x e M_y são infinitos e de sinais opostos nos vértices obtusos, como o de coordenadas $x = y = 0$. Em gráfico destes momentos, apresentado por Hughes e Tezduyar (1981) foram introduzidos os resultados obtidos com o elemento heterosis, como mostra a figura 7. Nesta figura, T1 é o elemento de Hughes e

Tezduyar, T1 é o elemento bilinear com integração reduzida seletiva e U1 é o elemento bilinear com integração reduzida uniforme. Observa-se o bom comportamento do elemento heterosis.

Figura 6 – Placa rombótica

5 - CONCLUSÕES

As funções de interpolação hierárquicas são essenciais no desenvolvimento de elementos finitos para o procedimento p-autoadaptativo. No elemento heterosis, entretanto, não é usual o uso dessas funções, o que requer um tratamento diferenciado entre as interpolações do deslocamento transversal e das rotações. Com o presente uso de funções hierárquicas elimina-se essa diferença de tratamento, simplificando o desenvolvimento do elemento. De forma complementar, desenvolveu-se um algoritmo para transformar o presente elemento hierárquico em convencional, para se tirar partido de vantagens deste último. Frente à simplicidade do presente desenvolvimento e do bom comportamento numérico do elemento heterosis biquadrático nos exemplos apresentados, conclui-se quanto à sua adequação em ser apresentado em cursos introdutórios ao método de elementos finitos e em ser utilizado em casos práticos de engenharia.

6 – BIBLIOGRAFIA

- Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. and Kanoknukulchai, W., 1977, A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, 159-154.
- Hughes, T. R. and Cohen, M., 1978, The “Heterosis” Finite Element for Plate Bending, *Computers & Structure*, vol. 9, 445-450.
- Hughes, T. R. and Tezduyar, T. E., 1981, Finite Elements Based upon Mindlin Plate Theory with particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, 587-596.
- Hughes, T. R., 1987, *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc.

- Mindlin, R. D., 1951, Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, 31-38.
- Peano, A. G., 1976, Hierarchies of Conforming Finite Elements for Plane Elasticity and Plate Bending, *Computer Mathematics with Applications*, vol. 2, 211-224.
- Reissner, E., 1945, The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, *Journal of Applied Mechanics*, *Transactions of ASME*, nº 12, A69-A77.
- Robinson, J. na Haggemacher, G. W., 1978, LORA – Na Accurate Four Node Stress Plate Bending Element, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, 296-306.
- Soriano, H. L. e Souza Lima, 1999, Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas, Escola de Engenharia da UFRJ.
- Zienkiewicz, O. C., Gago, J. P. S. R. and Kelly, D. W., 1983, The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis, *Computers & Structures*, vol. 16, 53-65.